«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»

_____ О.А. Решетникова
«07» ноября 2019 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ»
по информатике и ИКТ

_____ М.А. Погосян
«07» ноября 2019 г.

Единый государственный экзамен по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2020 года по информатике и ИКТ

подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2020 года по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2020 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2020 г. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2020 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2020 г. по информатике и ИКТ.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности. Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2020 г.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2020 года
по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 27 заданий. Часть 1 содержит 23 задания с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по информатике и ИКТ отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–23 записываются в виде числа, последовательности букв или цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ **Бланк**

Ответ: 23.

2	3															

Задания 24–27 требуют развёрнутого решения. В бланке ответов № 2 укажите номер задания и запишите его полное решение.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

В экзаменационных заданиях используются следующие соглашения.

1. Обозначения для логических связок (операций):
a) *отрицание* (инверсия, логическое НЕ) обозначается ¬ (например, ¬A);
b) *конъюнкция* (логическое умножение, логическое И) обозначается ∧ (например, A ∧ B) либо & (например, A & B);
c) *дизъюнкция* (логическое сложение, логическое ИЛИ) обозначается ∨ (например, A ∨ B) либо | (например, A | B);
d) *следование* (импликация) обозначается → (например, A → B);
e) *тождество* обозначается ≡ (например, A ≡ B). Выражение A ≡ B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают (либо они оба истинны, либо они оба ложны);
f) символ 1 используется для обозначения истины (истинного высказывания); символ 0 – для обозначения лжи (ложного высказывания).

2. Два логических выражения, содержащих переменные, называются *равносильными* (эквивалентными), если значения этих выражений совпадают при любых значениях переменных. Так, выражения A → B и (¬A) ∨ B равносильны, а A ∨ B и A ∧ B неравносильны (значения выражений разные, например, при A = 1, B = 0).

3. Приоритеты логических операций: инверсия (отрицание), конъюнкция (логическое умножение), дизъюнкция (логическое сложение), импликация (следование), тождество. Таким образом, ¬A ∧ B ∨ C ∧ D означает то же, что и ((¬A) ∧ B) ∨ (C ∧ D).
Возможна запись A ∧ B ∧ C вместо (A ∧ B) ∧ C. То же относится и к дизъюнкции: возможна запись A ∨ B ∨ C вместо (A ∨ B) ∨ C.

4. Обозначения Мбайт и Кбайт используются в традиционном для информатики смысле – как обозначения единиц измерения, чьё соотношение с единицей «байт» выражается степенью двойки.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Часть 1

Ответами к заданиям 1–23 являются число, последовательность букв или цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

1 Сколько существует натуральных чисел x, для которых выполняется неравенство $10011011_2 < x < 10011111_2$?
В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Ответ: _____.

2 Миша заполнял таблицу истинности функции $(x \wedge \neg y) \vee (x \equiv z) \vee \neg w$, но успел заполнить лишь фрагмент из трёх **различных** её строк, даже не указав, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z.

				$(x \wedge \neg y) \vee (x \equiv z) \vee \neg w$
0	1	1	0	**0**
0				**0**
	1	0	1	**0**

Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z.
В ответе напишите буквы w, x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала буква, соответствующая первому столбцу; затем буква, соответствующая второму столбцу, и т.д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.
Пример. Функция задана выражением $\neg x \vee y$, зависящим от двух переменных, а фрагмент таблицы имеет следующий вид.

		$\neg x \vee y$
0	1	**0**

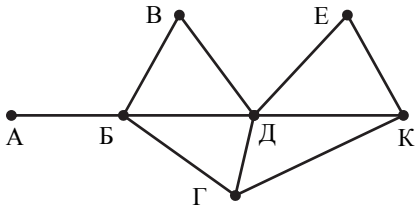
В этом случае первому столбцу соответствует переменная y, а второму столбцу – переменная x. В ответе следует написать yx.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

3 На рисунке схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах).

		Номер пункта						
		1	2	3	4	5	6	7
Номер пункта	1				9			7
	2				5		11	
	3						12	
	4	9	5			4	13	15
	5				4		10	8
	6		11	12	13	10		
	7	7			15	8		



Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Д в пункт Е. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

4 Ниже представлены два фрагмента таблиц из базы данных о жителях микрорайона. Каждая строка таблицы 2 содержит информацию о ребёнке и об одном из его родителей. Информация представлена значением поля ID в соответствующей строке таблицы 1. Определите на основании приведённых данных, у скольких детей на момент их рождения отцам было больше 25 полных лет. При вычислении ответа учитывайте только информацию из приведённых фрагментов таблиц.

Таблица 1

ID	Фамилия_И.О.	Пол	Год_рождения
14	Краснова Н.А.	Ж	1942
24	Сканави И.П.	М	1943
25	Сканави П.И.	М	1973
26	Сканави П.П.	М	1996
34	Кущенко А.И.	Ж	1964
35	Кущенко В.С.	Ж	1987
36	Кущенко С.С.	М	1964
44	Лебедь А.С.	Ж	1941
45	Лебедь В.А.	М	1953
46	Гросс О.С.	Ж	1992
47	Гросс П.О.	М	2009
54	Клычко А.П.	Ж	1993
64	Крот П.А.	Ж	1964
…	…	…	…

Таблица 2

ID_Родителя	ID_Ребёнка
24	25
44	25
25	26
64	26
24	34
44	34
34	35
36	35
14	36
34	46
36	46
25	54
64	54
…	…

Ответ: _____.

5 Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, П, Р, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв К, Л, М, Н использовали соответственно кодовые слова 000, 001, 010, 11. Для двух оставшихся букв – П и Р – длины кодовых слов неизвестны.

Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы П, при котором код будет удовлетворять условию Фано. Если таких кодов несколько, укажите код с **наименьшим** числовым значением.

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

6 На вход алгоритма подаётся натуральное число *N*. Алгоритм строит по нему новое число *R* следующим образом.

1. Строится двоичная запись числа *N*.
2. К этой записи дописываются справа ещё два разряда по следующему правилу:
   а) складываются все цифры двоичной записи числа *N*, и остаток от деления суммы на 2 дописывается в конец числа (справа). Например, запись 11100 преобразуется в запись 111001;
   б) над этой записью производятся те же действия – справа дописывается остаток от деления суммы её цифр на 2.

Полученная таким образом запись (в ней на два разряда больше, чем в записи исходного числа *N*) является двоичной записью искомого числа *R*.

Укажите минимальное число *R*, которое превышает число 97 и может являться результатом работы данного алгоритма. В ответе это число запишите в десятичной системе счисления.

Ответ: _____.

7 Дан фрагмент электронной таблицы. Из ячейки B3 в ячейку C2 была скопирована формула. При копировании адреса ячеек в формуле автоматически изменились. Каким стало числовое значение формулы в ячейке C2?

	A	B	C	D	E
1	1	10	100	1000	10000
2	2	20		2000	20000
3	3	=A$2+D$3	300	3000	30000
4	4	40	400	4000	40000

Примечание. Знак $ обозначает абсолютную адресацию.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

8 Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для Вашего удобства программа представлена на пяти языках программирования.

Бейсик

```
DIM S, N AS INTEGER
S = 0
N = 1
WHILE S < 51
  S = S + 11
  N = N * 2
WEND
PRINT N
```

Python

```
s = 0
n = 1
while s < 51:
    s = s + 11
    n = n * 2
print(n)
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел n, s
  s := 0
  n := 1
  нц пока s < 51
    s := s + 11
    n := n * 2
  кц
  вывод n
кон
```

Паскаль

```
var s, n: integer;
begin
  s := 0;
  n := 1;
  while s < 51 do
  begin
    s := s + 11;
    n := n * 2
  end;
  writeln(n)
end.
```

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{  int s = 0, n = 1;
   while (s < 51) { s = s + 11; n = n * 2; }
   cout << n << endl;
   return 0;
}
```

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

9 Для хранения произвольного растрового изображения размером 128×320 пикселей отведено 40 Кбайт памяти без учёта размера заголовка файла. Для кодирования цвета каждого пикселя используется одинаковое количество бит, коды пикселей записываются в файл один за другим без промежутков. Какое максимальное количество цветов можно использовать в изображении?

Ответ: _____.

10 Все 4-буквенные слова, в составе которых могут быть буквы Н, О, Т, К, И, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы, начиная с 1.
Ниже приведено начало списка.

1. ИИИИ
2. ИИИК
3. ИИИН
4. ИИИО
5. ИИИТ
6. ИИКИ

…

Под каким номером в списке идёт первое слово, которое начинается с буквы О?

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

11

Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Бейсик

```
SUB F(n)
  PRINT n,
  IF n >= 3 THEN
    F(n \ 2)
    F(n - 1)
  END IF
END SUB
```

Python

```
def F(n):
    print(n, end='')
    if n >= 3:
        F(n // 2)
        F(n - 1)
```

Алгоритмический язык

```
алг F(цел n)
нач
  вывод n
  если n >= 3 то
    F(div(n, 2))
    F(n - 1)
  все
кон
```

Паскаль

```
procedure F(n: integer);
begin
  write(n);
  if n >= 3 then
  begin
    F(n div 2);
    F(n - 1)
  end
end;
```

C++

```
void F(int n) {
  std::cout << n;
  if (n >= 3) {
    F(n / 2);
    F(n - 1);
  }
}
```

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут выведены на экран при выполнении вызова F(5). Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

12

В терминологии сетей TCP/IP маской сети называется двоичное число, определяющее, какая часть IP-адреса узла сети относится к адресу сети, а какая – к адресу самого узла в этой сети. Обычно маска записывается по тем же правилам, что и IP-адрес, – в виде четырёх байтов, причём каждый байт записывается в виде десятичного числа. При этом в маске сначала (в старших разрядах) стоят единицы, а затем с некоторого разряда – нули. Адрес сети получается в результате применения поразрядной конъюнкции к заданному IP-адресу узла и маске.
Например, если IP-адрес узла равен 231.32.255.131, а маска равна 255.255.240.0, то адрес сети равен 231.32.240.0.

Для узла с IP-адресом 111.81.27.224 адрес сети равен 111.81.27.192. Чему равен последний (самый правый) байт маски? Ответ запишите в виде десятичного числа.

Ответ: _____.

13

При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из 8-символьного набора: A, B, C, D, E, F, G, H. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование паролей, все символы кодируют одинаковым и минимально возможным количеством бит. Кроме собственно пароля, для каждого пользователя в системе хранятся дополнительные сведения, для чего отведено 24 байт на одного пользователя.
Определите объём памяти (в байтах), необходимый для хранения сведений о 20 пользователях. В ответе запишите только целое число – количество байт.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

14 Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах *v* и *w* обозначают цепочки цифр.

А) **заменить** (*v*, *w*).

Эта команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки *v* на цепочку *w*. Например, выполнение команды

заменить (111, 27)

преобразует строку 05111150 в строку 0527150.

Если в строке нет вхождений цепочки *v*, то выполнение команды

заменить (*v*, *w*) не меняет эту строку.

Б) **нашлось** (*v*).

Эта команда проверяет, встречается ли цепочка *v* в строке исполнителя Редактор. Если она встречается, то команда возвращает логическое значение «истина», в противном случае возвращает значение «ложь». Строка исполнителя при этом не изменяется.

Цикл

ПОКА *условие*

последовательность команд

КОНЕЦ ПОКА

выполняется, пока условие истинно.

В конструкции

ЕСЛИ *условие*

ТО *команда1*

ИНАЧЕ *команда2*

КОНЕЦ ЕСЛИ

выполняется *команда1* (если условие истинно) или *команда2* (если условие ложно).

Какая строка получится в результате применения приведённой ниже программы к строке, состоящей из 70 идущих подряд цифр 8? В ответе запишите полученную строку.

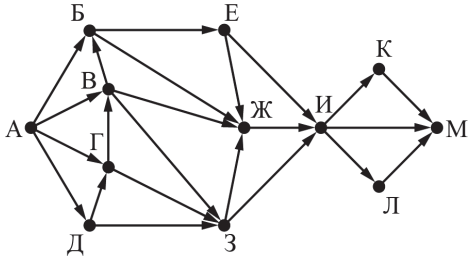
```
НАЧАЛО
ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (8888)
    ЕСЛИ нашлось (2222)
        ТО заменить (2222, 88)
        ИНАЧЕ заменить (8888, 22)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

15 На рисунке представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой.

Сколько существует различных путей из города А в город М, проходящих через город Ж?



Ответ: _____.

16 Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $4^8 + 2^8 - 8$?

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

17 В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для обозначения логической операции «И» – символ «&».
В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в сотнях тысяч)
Поле	54
Пшеница	40
Напряжённость	44
Поле & Пшеница	30
Напряжённость & Поле	14
Напряжённость & Пшеница	0

Какое количество страниц (в сотнях тысяч) будет найдено по запросу *Напряжённость* | *Поле* | *Пшеница*?
Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

Ответ: _____.

18 Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$(x + 2y < A) \vee (y > x) \vee (x > 30)$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

19 В программе используется одномерный целочисленный массив A с индексами от 0 до 11. Значения элементов равны 20, 19, 17, 41, 23, 12, 24, 16, 4, 13, 6, 15 соответственно, т.е. A[0] = 20, A[1] = 19 и т.д. Определите значение переменной *s* после выполнения следующего фрагмента этой программы (записанного ниже на пяти языках программирования).

Бейсик

```
s = 0
n = 0
FOR i = 0 TO 11
    IF A(i) <= A(n) THEN
        s = s + i
        t = A(i)
        A(i) = A(n)
        A(n) = t
   END IF
NEXT i
```

Python

```
s = 0
n = 0
for i in range(12):
    if A[i] <= A[n]:
        s += i
        t = A[i]
        A[i] = A[n]
        A[n] = t
```

Алгоритмический язык

```
s := 0
n := 0
нц для i от 0 до 11
   если A[i] <= A[n] то
     s := s + i
     t := A[i]
     A[i] := A[n]
     A[n] := t
   все
кц
```

Паскаль

```
s := 0;
n := 0;
for i := 0 to 11 do
   if A[i] <= A[n] then
   begin
     s := s + i;
     t := A[i];
     A[i] := A[n];
     A[n] := t
   end;
```

C++

```
s = 0;
n = 0;
for (int i = 0; i < 12; i++)
     if (A[i] <= A[n]){
         s += i;
         t = A[i];
         A[i] = A[n];
         A[n] = t;
     }
```

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

20 Ниже на пяти языках программирования записан алгоритм. Получив на вход число x, этот алгоритм печатает два числа: L и M. Укажите **наименьшее** число x, при вводе которого алгоритм печатает сначала 6, а потом 7.

Бейсик

```
DIM X, L, M AS INTEGER
INPUT X
L = 0
M = 0
WHILE X > 0
  M = M + 1
  IF X MOD 2 = 0 THEN
    L = L + 1
  ENDIF
  X = X \ 2
WEND
PRINT L
PRINT M
```

Python

```
x = int(input())
L = 0
M = 0
while x > 0:
    M = M + 1
    if x % 2 == 0:
        L = L + 1
    x = x // 2
print(L)
print(M)
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел x, L, M
  ввод x
  L := 0
  M := 0
  нц пока x > 0
    M := M + 1
    если mod(x,2) = 0
      то
        L := L + 1
    все
    x := div(x,2)
  кц
  вывод L, нс, M
кон
```

Паскаль

```
var x, L, M: integer;
begin
  readln(x);
  L := 0;
  M := 0;
  while x > 0 do
  begin
    M := M + 1;
    if x mod 2 = 0 then
      L := L + 1;
    x := x div 2;
  end;
  writeln(L);
  writeln(M);
end.
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
  int x, L, M;
  cin >> x;
  L = 0;
  M = 0;
  while (x > 0){
    M = M + 1;
    if(x % 2 == 0){
      L = L + 1;
    }
    x = x / 2;
  }
  cout << L << endl << M << endl;
  return 0;
}
```

Ответ: _____.

21 Напишите в ответе число, которое будет выведено в результате выполнения следующего алгоритма. Для Вашего удобства алгоритм представлен на пяти языках программирования.

Бейсик

```
DIM A, B, T, M, R AS LONG
A = -20: B = 20
M = A: R = F(A)
FOR T = A TO B
  IF F(T) < R THEN
    M = T
    R = F(T)
  END IF
NEXT T
PRINT M + 27

FUNCTION F(x)
  F = 2 * (x * x - 100) * (x * x - 100) + 5
END FUNCTION
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Python

```
def F(x):
  return 2 * (x * x - 100) * (x * x - 100) + 5
a = -20; b = 20
M = a; R = F(a)
for t in range(a, b + 1):
  if (F(t) < R):
    M = t; R = F(t)
print(M + 27)
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел a, b, t, M, R
  a := -20; b := 20
  M := a; R := F(a)
  нц для t от a до b
    если F(t) < R то
        M := t; R := F(t)
    все
  кц
  вывод M + 27
кон
алг цел F(цел x)
нач
  знач := 2 * (x * x - 100) * (x * x - 100) + 5
кон
```

Паскаль

```
var a, b, t, M, R: longint;
function F(x: longint): longint;
  begin
    F := 2 * (x * x - 100) * (x * x - 100) + 5;
  end;
begin
  a := -20; b := 20;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do begin
    if (F(t) < R) then begin
      M := t;
      R := F(t)
    end
  end;
  write(M + 27)
end.
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

long F(long x)
{
  return 2 * (x * x - 100) * (x * x - 100) + 5;
}
int main()
{
  long a, b, t, M, R;
  a = -20; b = 20;
  M = a; R = F(a);
  for (t = a; t <= b; t++) {
    if (F(t) < R) {
      M = t; R = F(t);
    }
  }
  cout << M + 27 << endl;
  return 0;
}
```

Ответ: _____.

22 Исполнитель преобразует число на экране.

У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2.

Программа для исполнителя – это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 20 и при этом траектория вычислений содержит число 10?

Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы **121** при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 17.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

23 Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, ... x_8, y_1, y_2, ... y_8, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(\neg (x_1 \equiv y_1)) \equiv (x_2 \equiv y_2)$
$(\neg (x_2 \equiv y_2)) \equiv (x_3 \equiv y_3)$
…
$(\neg (x_7 \equiv y_7)) \equiv (x_8 \equiv y_8)$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, ... x_8, y_1, y_2, ... y_8, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Часть 2

Для записи ответов на задания этой части (24–27) используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер задания (24, 25 и т. д.), а затем полное решение. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

24 На обработку поступает натуральное число, не превышающее 10^9. Нужно написать программу, которая выводит на экран минимальную чётную цифру этого числа. Если в числе нет чётных цифр, требуется на экран вывести «NO». Программист написал программу неправильно. Ниже эта программа для Вашего удобства приведена на пяти языках программирования.

Бейсик

```
DIM N, DIGIT, MINDIGIT AS LONG
INPUT N
MINDIGIT = N MOD 10
WHILE N > 0
  DIGIT = N MOD 10
  IF DIGIT MOD 2 = 0 THEN
    IF DIGIT < MINDIGIT THEN
      MINDIGIT = DIGIT
    END IF
  END IF
  N = N \ 10
WEND
IF MINDIGIT = 0 THEN
  PRINT "NO"
ELSE
  PRINT MINDIGIT
END IF
```

Python

```
N = int(input())
minDigit = N % 10
while N > 0:
  digit = N % 10
  if digit % 2 == 0:
    if digit < minDigit:
      minDigit = digit
  N = N // 10
if minDigit == 0:
  print("NO")
else:
  print(minDigit)
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел N, digit, minDigit
  ввод N
  minDigit := mod(N,10)
  нц пока N > 0
    digit := mod(N,10)
    если mod(digit, 2) = 0 то
      если digit < minDigit то
        minDigit := digit
      все
    все
    N := div(N,10)
  кц
  если minDigit = 0 то
    вывод "NO"
  иначе
    вывод minDigit
  все
кон
```

Паскаль

```
var N,digit,minDigit: longint;
begin
  readln(N);
  minDigit := N mod 10;
  while N > 0 do
  begin
    digit := N mod 10;
    if digit mod 2 = 0 then
      if digit < minDigit then
        minDigit := digit;
    N := N div 10;
  end;
  if minDigit = 0 then
    writeln('NO')
  else
    writeln(minDigit)
end.
```

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
  int N, digit, minDigit;
  cin >> N;
  minDigit = N % 10;
  while (N > 0) {
    digit = N % 10;
    if (digit % 2 == 0)
      if (digit < minDigit)
        minDigit = digit;
    N = N / 10;
  }
  if (minDigit == 0)
    cout << "NO" << endl;
  else
    cout << minDigit << endl;
  return 0;
}
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Последовательно выполните следующее.

1. Напишите, что выведет эта программа при вводе числа 231.
2. Приведите пример такого трёхзначного числа, при вводе которого приведённая программа, несмотря на ошибки, выдаёт верный ответ.
3. Найдите допущенные программистом ошибки и исправьте их. Исправление ошибки должно затрагивать только строку, в которой находится ошибка. Для каждой ошибки:
   1) выпишите строку, в которой сделана ошибка;
   2) укажите, как исправить ошибку, т.е. приведите правильный вариант строки.

Известно, что в тексте программы можно исправить ровно две строки так, чтобы она стала работать правильно.

Достаточно указать ошибки и способ их исправления для одного языка программирования.

Обратите внимание на то, что требуется найти ошибки в имеющейся программе, а не написать свою, возможно, использующую другой алгоритм решения.

25 Дан целочисленный массив из 30 элементов. Элементы массива могут принимать натуральные значения от 1 до 10 000 включительно. Опишите на одном из языков программирования алгоритм, который находит минимум среди элементов массива, не делящихся нацело на 6, а затем заменяет каждый элемент, не делящийся нацело на 6, на число, равное найденному минимуму. Гарантируется, что хотя бы один такой элемент в массиве есть. В качестве результата необходимо вывести изменённый массив, каждый элемент выводится с новой строчки.

Например, для исходного массива из шести элементов:

14
6
11
18
9
24

программа должна вывести следующий массив:

9
6
9
18
9
24

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Исходные данные объявлены так, как показано ниже на примерах для некоторых языков программирования. Запрещается использовать переменные, не описанные ниже, но разрешается не использовать некоторые из описанных переменных.

Бейсик

```
CONST N AS INTEGER = 30
DIM A (1 TO N) AS LONG
DIM I AS LONG,
    J AS LONG,
    K AS LONG

FOR I = 1 TO N
    INPUT A(I)
NEXT I
...

END
```

Python

```
# допускается также
# использовать две
# целочисленные переменные j и k
a = []
n = 30
for i in range(0, n):
    a.append(int(input()))
...
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
    цел N = 30
    целтаб a[1:N]
    цел i, j, k
    нц для i от 1 до N
        ввод a[i]
    кц
    ...

кон
```

Паскаль

```
const
    N = 30;
var
    a: array [1..N] of longint;
    i, j, k: longint;
begin
    for i := 1 to N do
        readln(a[i]);
    ...

end.
```

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int N = 30;
int main() {
    long a[N];
    long i, j, k;
    for (i = 0; i < N; i++)
        cin >>  a[i];
    ...
    return 0;
}
```

В качестве ответа Вам необходимо привести фрагмент программы, который должен находиться на месте многоточия. Вы можете записать решение также на другом языке программирования (укажите название и используемую версию языка программирования, например Free Pascal 2.6). В этом случае Вы должны использовать те же самые исходные данные и

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

переменные, какие были предложены в условии (например, в образце, записанном на Алгоритмическом языке).

26

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **три раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:
(11, 7), (30, 7), (10, 8), (10, 21). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.
Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче – S камней; $1 \le S \le 61$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии **не следует** включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть за один ход.

б) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

Задание 2

Укажите такое значение S, при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;
– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Задание 3

Укажите значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения *S* опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы).

В узлах дерева указывайте позиции, на рёбрах рекомендуется указывать ходы. Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не является верным ответом на это задание.

27

На вход программы поступает последовательность из n целых положительных чисел. Рассматриваются все пары элементов последовательности a_i и a_j, такие что $i < j$ и $a_i > a_j$ (первый элемент пары больше второго; i и j – порядковые номера чисел в последовательности входных данных). Среди пар, удовлетворяющих этому условию, необходимо найти и напечатать пару с максимальной суммой элементов, которая делится на m = 120. Если среди найденных пар максимальную сумму имеют несколько, то можно напечатать любую из них.

Описание входных и выходных данных

В первой строке входных данных задаётся количество чисел n ($2 \le n \le 12\,000$). В каждой из последующих n строк записано одно целое положительное число, не превышающее 10 000.

В качестве результата программа должна напечатать элементы искомой пары. Если таких пар несколько, можно вывести любую из них. Гарантируется, что хотя бы одна такая пара в последовательности есть.

Пример входных данных:

```
6
60
140
61
100
300
59
```

Пример выходных данных для приведённого выше примера входных данных:

```
140 100
```

Пояснение. Из шести заданных чисел можно составить три пары, сумма элементов которых делится на m=120: 60+300, 140+100 и 61+59. Во второй и третьей из этих пар первый элемент больше второго, но во второй паре сумма больше.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Требуется написать эффективную по времени и памяти программу для решения описанной задачи.

Программа считается эффективной по времени, если при одновременном увеличении количества элементов последовательности n и параметра m в k раз время работы программы увеличивается не более чем в k раз.

Программа считается эффективной по памяти, если память, необходимая для хранения всех переменных программы, не превышает 4 килобайта и не увеличивается с ростом n.

Максимальная оценка за правильную (не содержащую синтаксических ошибок и дающую правильный ответ при любых допустимых входных данных) программу, эффективную по времени и памяти, – 4 балла.

Максимальная оценка за правильную программу, возможно, неэффективную по памяти или время выполнения которой существенно зависит от величины m, – 3 балла.

Максимальная оценка за правильную программу, не удовлетворяющую требованиям эффективности, – 2 балла.

Вы можете сдать **одну** программу или **две** программы решения задачи (например, одна из программ может быть менее эффективна). Если Вы сдадите две программы, то каждая из них будет оцениваться независимо от другой, итоговой станет **бóльшая** из двух оценок.

Перед текстом программы обязательно кратко опишите алгоритм решения. Укажите использованный язык программирования и его версию.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Система оценивания экзаменационной работы по информатике и ИКТ

Часть 1

За правильный ответ на задания 1–23 ставится 1 балл; за неверный ответ или его отсутствие – 0 баллов.

Номер задания	Правильный ответ
1	3
2	xwzy
3	9
4	2
5	10
6	102
7	30020
8	32
9	256
10	376
11	5242312
12	192
13	600
14	22
15	51
16	6
17	94
18	91
19	16
20	64
21	17
22	28
23	512

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Часть 2
Критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

24 На обработку поступает натуральное число, не превышающее 10^9. Нужно написать программу, которая выводит на экран минимальную чётную цифру этого числа. Если в числе нет чётных цифр, требуется на экран вывести «NO». Программист написал программу неправильно. Ниже эта программа для Вашего удобства приведена на пяти языках программирования.

Бейсик

```
DIM N, DIGIT, MINDIGIT AS LONG
INPUT N
MINDIGIT = N MOD 10
WHILE N > 0
  DIGIT = N MOD 10
  IF DIGIT MOD 2 = 0 THEN
    IF DIGIT < MINDIGIT THEN
      MINDIGIT = DIGIT
    END IF
  END IF
  N = N \ 10
WEND
IF MINDIGIT = 0 THEN
  PRINT "NO"
ELSE
  PRINT MINDIGIT
END IF
```

Python

```
N = int(input())
minDigit = N % 10
while N > 0:
  digit = N % 10
  if digit % 2 == 0:
    if digit < minDigit:
      minDigit = digit
  N = N // 10
if minDigit == 0:
  print("NO")
else:
  print(minDigit)
```

Алгоритмический язык

```
алг
нач
  цел N, digit, minDigit
  ввод N
  minDigit := mod(N,10)
  нц пока N > 0
    digit := mod(N,10)
    если mod(digit, 2) = 0 то
      если digit < minDigit то
        minDigit := digit
      все
    все
    N := div(N,10)
  кц
  если minDigit = 0 то
    вывод "NO"
  иначе
    вывод minDigit
  все
кон
```

Паскаль

```
var N,digit,minDigit: longint;
begin
  readln(N);
  minDigit := N mod 10;
  while N > 0 do
  begin
    digit := N mod 10;
    if digit mod 2 = 0 then
      if digit < minDigit then
        minDigit := digit;
    N := N div 10;
  end;
  if minDigit = 0 then
    writeln('NO')
  else
    writeln(minDigit)
end.
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
  int N, digit, minDigit;
  cin >> N;
  minDigit = N % 10;
  while (N > 0) {
    digit = N % 10;
    if (digit % 2 == 0)
      if (digit < minDigit)
        minDigit = digit;
    N = N / 10;
  }
  if (minDigit == 0)
    cout << "NO" << endl;
  else
    cout << minDigit << endl;
  return 0;
}
```

Последовательно выполните следующее.

1. Напишите, что выведет эта программа при вводе числа 231.
2. Приведите пример такого трёхзначного числа, при вводе которого приведённая программа, несмотря на ошибки, выдаёт верный ответ.
3. Найдите допущенные программистом ошибки и исправьте их. Исправление ошибки должно затрагивать только строку, в которой находится ошибка. Для каждой ошибки:
   1) выпишите строку, в которой сделана ошибка;
   2) укажите, как исправить ошибку, т.е. приведите правильный вариант строки.

Известно, что в тексте программы можно исправить ровно две строки так, чтобы она стала работать правильно.

Достаточно указать ошибки и способ их исправления для одного языка программирования.

Обратите внимание на то, что требуется найти ошибки в имеющейся программе, а не написать свою, возможно, использующую другой алгоритм решения.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Содержание верного ответа и указания по оцениванию
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)

Решение использует запись программы на Паскале. Допускается использование программы на любом из четырёх других языков программирования.

1. Программа выведет число 1.
2. Программа выдаёт правильный ответ, например, для числа 132.

Замечание для проверяющего. Программа работает неправильно из-за неверной начальной инициализации и неверной проверки отсутствия чётных цифр. Соответственно, программа будет выдавать верный ответ, если вводимое число не содержит 0, содержит хотя бы одну чётную цифру и наименьшая чётная цифра числа не больше младшей (крайней правой) цифры числа (или просто стоит последней).

3. В программе есть две ошибки.

Первая ошибка: неверная инициализация ответа (переменная `minDigit`).

Строка с ошибкой:

```
minDigit := N mod 10;
```

Верное исправление:

```
minDigit := 10;
```

Вместо `10` может быть использовано любое целое число, большее 8.

Вторая ошибка: неверная проверка отсутствия чётных цифр.

Строка с ошибкой:

```
if minDigit = 0 then
```

Верное исправление:

```
if minDigit = 10 then
```

Вместо `10` может быть другое число, большее 8, которое было положено в `minDigit` при исправлении первой ошибки, или проверка, что `minDigit > 8`

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Указания по оцениванию	Баллы
Обратите внимание! В задаче требовалось выполнить **четыре** действия: 1) указать, что выведет программа при конкретном входном числе; 2) указать пример входного числа, при котором программа выдаёт верный ответ; 3) исправить первую ошибку; 4) исправить вторую ошибку. Для проверки правильности выполнения п. 2) нужно формально выполнить исходную (ошибочную) программу с входными данными, которые указал экзаменуемый, и убедиться в том, что результат, выданный программой, будет таким же, как и для правильной программы. Для действий 3) и 4) ошибка считается исправленной, если выполнены оба следующих условия: а) правильно указана строка с ошибкой; б) указан такой новый вариант строки, что при исправлении другой ошибки получается правильная программа	
Выполнены все четыре необходимых действия, и ни одна верная строка не указана в качестве ошибочной	3
Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 балла. Имеет место одна из следующих ситуаций: а) выполнены три из четырёх необходимых действий. Ни одна верная строка не указана в качестве ошибочной; б) выполнены все четыре необходимых действия. Указано в качестве ошибочной не более одной верной строки	2
Не выполнены условия, позволяющие поставить 2 или 3 балла. Выполнены два из четырёх необходимых действий	1
Не выполнены условия, позволяющие поставить 1, 2 или 3 балла	0
Максимальный балл	*3*

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

25

Дан целочисленный массив из 30 элементов. Элементы массива могут принимать натуральные значения от 1 до 10 000 включительно. Опишите на одном из языков программирования алгоритм, который находит минимум среди элементов массива, не делящихся нацело на 6, а затем заменяет каждый элемент, не делящийся нацело на 6, на число, равное найденному минимуму. Гарантируется, что хотя бы один такой элемент в массиве есть. В качестве результата необходимо вывести изменённый массив, каждый элемент выводится с новой строчки.
Например, для исходного массива из шести элементов:
14
6
11
18
9
24
программа должна вывести следующий массив:
9
6
9
18
9
24

Исходные данные объявлены так, как показано ниже на примерах для некоторых языков программирования. Запрещается использовать переменные, не описанные ниже, но разрешается не использовать некоторые из описанных переменных.

Бейсик

```
CONST N AS INTEGER = 30
DIM A (1 TO N) AS LONG
DIM I AS LONG,
    J AS LONG,
    K AS LONG

FOR I = 1 TO N
    INPUT A(I)
NEXT I
...

END
```

Python

```
# допускается также
# использовать две
# целочисленные переменные j и k
a = []
n = 30
for i in range(0, n):
    a.append(int(input()))
...
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Алгоритмический язык	Паскаль

алг
нач
  цел N = 30
  целтаб a[1:N]
  цел i, j, k
  нц для i от 1 до N
  ввод a[i]
  кц
  ...
 	
кон
	const
	  N = 30;
	var
	  a: array [1..N] of longint;
	  i, j, k: longint;
	begin
	  for i := 1 to N do
	  readln(a[i]);
	  ...
	
	end.

C++

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int N = 30;
int main() {
    long a[N];
    long i, j, k;
    for (i = 0; i < N; i++)
        cin >>  a[i];
    ...
    return 0;
}
```

В качестве ответа Вам необходимо привести фрагмент программы, который должен находиться на месте многоточия. Вы можете записать решение также на другом языке программирования (укажите название и используемую версию языка программирования, например Free Pascal 2.6). В этом случае Вы должны использовать те же самые исходные данные и переменные, какие были предложены в условии (например, в образце, записанном на Алгоритмическом языке).

Содержание верного ответа и указания по оцениванию
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)

На языке Паскаль

```
k := 10000;
for i := 1 to N do
  if (a[i] mod 6 <> 0) and (a[i] < k) then
    k := a[i];
for i := 1 to N do begin
  if (a[i] mod 6 <> 0) then
    a[i] := k;
  writeln(a[i]);
end;
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

На Алгоритмическом языке

```
k := 10000
нц для i от 1 до N
  если mod(a[i], 6) <> 0 и a[i] < k
  то
    k := a[i]
  все
кц
нц для i от 1 до N
  если mod(a[i], 6) <> 0
  то
    a[i] := k
  все
  вывод a[i], нс
кц
```

На языке Бейсик

```
K = 10000
FOR I = 1 TO N
  IF A(I) MOD 6  <> 0 AND A(I) < K THEN
    K = A(I)
  END IF
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  IF A(I) MOD 6 <> 0 THEN
    A(I) = K
  END IF
  PRINT A(I)
NEXT I
```

На языке C++

```
k = 10000;
for (i = 0; i < N; i++)
  if (a[i] % 6 != 0 && a[i] < k)
    k = a[i];
for (i = 0; i < N; i++) {
  if (a[i] % 6 != 0)
    a[i] = k;
  cout << a[i] << endl;
}
```

На языке Python

```
k = 10000
for i in range(0, n):
    if (a[i] % 6 != 0 and a[i] < k):
        k = a[i]
for i in range(0, n):
    if (a[i] % 6 != 0):
        a[i] = k
    print(a[i])
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Указания по оцениванию	Баллы
Общие указания. 1. В алгоритме, записанном на языке программирования, допускается наличие отдельных синтаксических ошибок, не искажающих замысла автора программы. 2. Эффективность алгоритма не имеет значения и не оценивается. 3. Допускается запись алгоритма на языке программирования, отличном от языков, приведённых в условии. В этом случае должны использоваться переменные, аналогичные описанным в условии. Если язык программирования использует типизированные переменные, описания переменных должны быть аналогичны описаниям переменных на Алгоритмическом языке. Использование нетипизированных или необъявленных переменных возможно только в случае, если это допускается языком программирования; при этом количество переменных и их идентификаторы должны соответствовать условию задачи. 4. Допускается формат вывода массива, отличный от указанного, например в строчку	
Предложен правильный алгоритм, который изменяет исходный массив и выводит в качестве результата изменённый массив	2
Не выполнены условия, позволяющие поставить 2 балла. При этом предложено в целом верное решение, содержащее не более одной ошибки из числа следующих: 1) в цикле происходит выход за границу массива; 2) не инициализируется или неверно инициализируется минимум; 3) неверно осуществляется проверка делимости на 6; 4) проверяется делимость на 6 не элемента массива, а его индекса; 5) в сравнении с минимумом перепутаны знаки «больше» и «меньше»; 6) сравнение с минимумом производится для индекса элемента массива, а не для его значения; 7) неверно составлено логическое условие (например, используется or вместо and); 8) исходный массив не изменяется; 9) изменяются не все требуемые элементы (например, только первый или последний из них); 10) отсутствует вывод ответа, или ответ выводится не полностью (например, только один элемент массива ввиду пропущенного цикла вывода элементов или операторных скобок); 11) используется переменная, не объявленная в разделе описания переменных;	1

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

12) не указано или неверно указано условие завершения цикла; 13) индексная переменная в цикле не меняется (например, в цикле while) или меняется неверно	
Ошибок, перечисленных в п. 1–13, две или больше, или алгоритм сформулирован неверно (в том числе при отсутствии в явном или неявном виде цикла поиска нужного элемента)	0
Максимальный балл	*2*

26

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **три раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:
(11, 7), (30, 7), (10, 8), (10, 21). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.
Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней.
В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче – S камней; $1 \le S \le 61$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии **не следует** включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1

в) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть за один ход.

г) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.

Задание 2

Укажите такое значение S, при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения *S* опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3

Укажите значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения *S* опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы).

В узлах дерева указывайте позиции, на рёбрах рекомендуется указывать ходы. Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не является верным ответом на это задание.

Содержание верного ответа и указания по оцениванию
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)

Задание 1

а) Петя может выиграть при $21 \le S \le 61$.
б) $S = 7$.

Задание 2

Возможное значение *S*: 20. В этом случае Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить позицию (7, 20). После хода Вани может возникнуть одна из четырёх позиций: (8, 20), (21, 20), (7, 21), (7, 60). В каждой из этих позиций Петя может выиграть одним ходом, утроив количество камней во второй куче.

Замечание для проверяющего. Ещё одно возможное значение *S* для этого задания – число 13. В этом случае Петя первым ходом должен утроить количество камней в меньшей куче и получить позицию (6*3, 13) = (18, 13). При такой позиции Ваня не может выиграть первым ходом, а после любого хода Вани Петя может выиграть, утроив количество камней в большей куче. Достаточно указать одно значение *S* и описать для него выигрышную стратегию.

Задание 3

Возможное значение *S*: 19. После первого хода Пети возможны позиции: (7, 19), (18, 19), (6, 20), (6, 57). В позициях (18, 19) и (6, 57) Ваня может выиграть первым ходом, утроив количество камней во второй куче. Из позиций (7, 19) и (6, 20) Ваня может получить позицию (7, 20). Эта позиция разобрана в п. 2. Игрок, который её получил (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

В таблице изображено дерево возможных партий (и только их) при описанной стратегии Вани. Заключительные позиции (в них выигрывает Ваня) выделены жирным шрифтом. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде (оба способа изображения дерева допустимы).

	Положения после очередных ходов			
Исходное положение	1-й ход Пети (разобраны все ходы, указана полученная позиция)	1-й ход Вани (только ход по стратегии, указана полученная позиция)	2-й ход Пети (разобраны все ходы, указана полученная позиция)	2-й ход Вани (только ход по стратегии, указана полученная позиция)
(6, 19) Всего: 25	(6, 19+1) = (6, 20) Всего: 26	(6+1, 20) = (7, 20) Всего: 27	(7+1, 20) = (8, 20) Всего: 28	(8, 20*3) = (8, 60) **Всего: 68**
			(7, 20+1) = (7, 21) Всего: 28	(7, 21*3) = (7, 63) **Всего: 70**
			(7*3, 20) = (21, 20) Всего: 41	(21, 20*3) = (21, 60) **Всего: 81**
			(7, 20*3) = (7, 60) Всего: 67	(7, 60*3) = (7, 180) **Всего: 187**
	(6+1, 19) = (7, 19) Всего: 26	(7, 19+1) = (7, 20) Всего: 27	(7+1, 20) = (8, 20) Всего: 28	(8, 20*3) = (8, 60) **Всего: 68**
			(7, 20+1) = (7, 21) Всего: 28	(7, 21*3) = (7, 63) **Всего: 70**
			(7*3, 20) = (21, 20) Всего: 41	(21, 20*3) = (21, 60) **Всего: 81**
			(7, 20*3) = (7, 60) Всего: 67	(7, 60*3) = (7, 180) **Всего: 187**
	(6*3, 19) = (18, 19) Всего: 37	(18, 19*3) = (18, 57) **Всего: 75**		
	(6, 19*3) = (6, 57) Всего: 63	(6, 57*3) = (6, 171) **Всего: 177**		

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Примечание для эксперта. Дерево всех партий может быть также изображено в виде ориентированного графа – так, как показано на рисунке, или другим способом. Важно, чтобы множество полных путей в графе находилось во взаимно однозначном соответствии со множеством партий, возможных при описанной в решении стратегии.

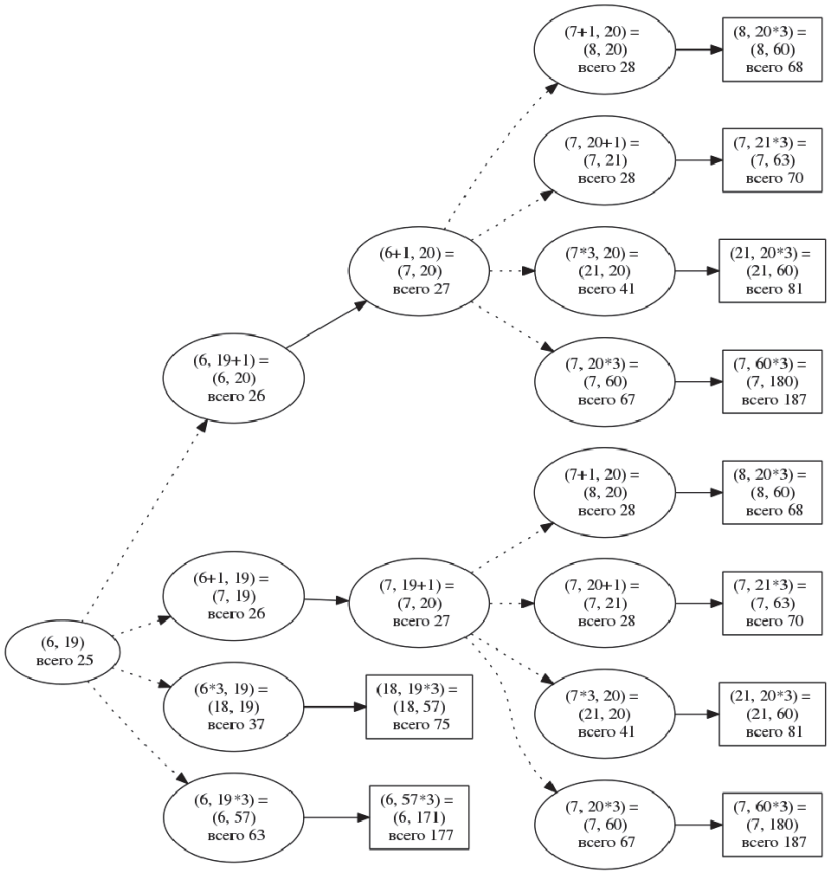


Рис. 1. Дерево всех партий, возможных при Ваниной стратегии. Ходы Пети показаны пунктиром; ходы Вани – сплошными линиями. Прямоугольником обозначены позиции, в которых партия заканчивается.

Замечание для проверяющего. Не является ошибкой указание только одного заключительного хода выигрывающего игрока в ситуации, когда у него есть более одного выигрышного хода.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Указания по оцениванию	**Баллы**
В задаче требуется выполнить три задания. Их трудность возрастает. Количество баллов в целом соответствует количеству выполненных заданий (подробнее см. ниже). Ошибка в решении, не искажающая основного замысла и не приведшая к неверному ответу, например арифметическая ошибка при вычислении количества камней в заключительной позиции, при оценке решения не учитывается. Задание 1 выполнено, если выполнены оба пункта: а) и б), т.е. для п. а) перечислены все значения *S*, удовлетворяющие условию (и только они), для п. б) указано верное значение *S* (и только оно). Задание 2 выполнено, если правильно указана позиция, выигрышная для Пети, и описана соответствующая стратегия Пети – так, как это сделано в примере решения, или другим способом, например с помощью дерева всех возможных при выбранной стратегии Пети партий (и только их). Задание 3 выполнено, если правильно указана позиция, выигрышная для Вани, и построено дерево всех возможных при Ваниной стратегии партий (и только их). Во всех случаях стратегии могут быть описаны так, как это сделано в примере решения, или другим способом	
Выполнены задания 1, 2 и 3	3
Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 балла, и выполнено одно из следующих условий. 1. Выполнено задание 3. 2. Выполнены задания 1 и 2	2
Не выполнены условия, позволяющие поставить 2 или 3 балла, и выполнено одно из следующих условий. 1. Выполнено задание 1. 2. Выполнено задание 2	1
Не выполнено ни одно из условий, позволяющих поставить 1, 2 или 3 балла	0
Максимальный балл	*3*

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

27

На вход программы поступает последовательность из n целых положительных чисел. Рассматриваются все пары элементов последовательности a_i и a_j, такие что $i < j$ и $a_i > a_j$ (первый элемент пары больше второго; i и j – порядковые номера чисел в последовательности входных данных). Среди пар, удовлетворяющих этому условию, необходимо найти и напечатать пару с максимальной суммой элементов, которая делится на m = 120. Если среди найденных пар максимальную сумму имеют несколько, то можно напечатать любую из них.

Описание входных и выходных данных

В первой строке входных данных задаётся количество чисел n ($2 \le n \le 12\,000$). В каждой из последующих n строк записано одно целое положительное число, не превышающее 10 000.

В качестве результата программа должна напечатать элементы искомой пары. Если таких пар несколько, можно вывести любую из них. Гарантируется, что хотя бы одна такая пара в последовательности есть.

Пример входных данных:

```
6
60
140
61
100
300
59
```

Пример выходных данных для приведённого выше примера входных данных:

```
140 100
```

Пояснение. Из шести заданных чисел можно составить три пары, сумма элементов которых делится на m=120: 60+300, 140+100 и 61+59. Во второй и третьей из этих пар первый элемент больше второго, но во второй паре сумма больше.

Требуется написать эффективную по времени и памяти программу для решения описанной задачи.

Программа считается эффективной по времени, если при одновременном увеличении количества элементов последовательности n и параметра m в k раз время работы программы увеличивается не более чем в k раз. Программа считается эффективной по памяти, если память, необходимая для хранения всех переменных программы, не превышает 4 килобайта и не увеличивается с ростом n.

Максимальная оценка за правильную (не содержащую синтаксических ошибок и дающую правильный ответ при любых допустимых входных данных) программу, эффективную по времени и памяти, – 4 балла.

Максимальная оценка за правильную программу, возможно, неэффективную по памяти или время выполнения которой существенно зависит от величины m, – 3 балла.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Максимальная оценка за правильную программу, не удовлетворяющую требованиям эффективности, – 2 балла.

Вы можете сдать **одну** программу или **две** программы решения задачи (например, одна из программ может быть менее эффективна). Если Вы сдадите две программы, то каждая из них будет оцениваться независимо от другой, итоговой станет **бóльшая** из двух оценок.

Перед текстом программы обязательно кратко опишите алгоритм решения. Укажите использованный язык программирования и его версию.

Содержание верного ответа (допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)
Сумма a_i и a_j делится на m, если сумма остатков этих чисел от деления на m равна 0 или m. Для каждого из остатков от деления на m среди уже просмотренных элементов будем хранить максимальное число, имеющее соответствующий остаток от деления на m. Для этого будем использовать массив r длиной m, изначально с элементами, равными 0. Все считанные значения при этом можно не хранить. Очередное считанное число a будем рассматривать как возможный правый элемент искомой пары. Пусть остаток от деления a на m равен p. Тогда если $r[m–p] > 0$, то сумма a и $r[m–p]$ делится на m, и при условии $r[m–p] > a$ эта пара – кандидат для ответа. Если их сумма больше предыдущего ответа, то заменим его. При этом если остаток от деления a на m равен 0, то рассматривать надо пару a и $r[0]$. По окончании обработки элемента a необходимо обновить элемент $r[p]$ значением a, если $a > r[p]$. Ниже приведена реализующая описанный алгоритм программа на языке Паскаль (использована версия PascalABC)

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Пример 1. Программа на языке Паскаль. Программа эффективна по времени и памяти

```
const m = 120; {количество различных остатков}
var
  {хранение максимального значения для каждого из остатков}
  r: array[0..m-1] of integer;
  n, a, i, p, left, right: integer;
begin
  readln(n);
  {обнуление массива r}
  for i := 0 to m - 1 do
    r[i] := 0;
  {обнуление переменных для записи ответа}
  left := 0; right := 0;
  {ввод значений, поиск искомой пары}
  for i := 1 to n do
  begin
    readln(a); {считываем очередное значение}
    p := a mod m;
    if p = 0 then
    begin
      if (r[0] > a) and (r[0] + a > left + right) then
      begin
        left := r[0]; right := a {обновление ответа}
      end
    end
    else
    begin
      if (r[m - p] > a) and (r[m - p] + a > left + right) then
      begin
        left := r[m - p]; right := a {обновление ответа}
      end
    end;
    {обновление элемента r для соответствующего остатка}
    if a > r[p] then r[p] := a
  end;
  writeln(left, ' ',right)
end.
```

Комментарии для проверяющего

1. При таком решении хранится только очередной прочитанный элемент и информация о максимальных значениях, имеющих различные остатки от деления на m (на их хранение будет потрачено не более $4m$ байт памяти, а на все переменные в целом – менее 4 килобайт). Таким образом, используемая память не зависит от длины последовательности. Время обработки очередного числа фиксировано, т.е. не зависит от длины последовательности и даже от величины m. Поэтому при увеличении длины последовательности в k раз время работы программы увеличивается не более чем в k раз. Таким образом, приведённая выше программа эффективна как по времени, так и по используемой памяти. Это решение оценивается 4 баллами.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Программа может не рассматривать отдельно случай $p = 0$, а учесть оба случая с помощью одной формулы: `(m - p) mod m`. Такой вариант реализации показан в примере 2 программы на языке Python. Может быть реализовано решение с заменой $p = 0$ на $p = m$. Такая программа на языке C++ приведена ниже (пример 3).

Все подобные программы оцениваются, исходя из максимального балла – 4 (см. критерии).

2. Возможно решение, основанное на описанных идеях, однако предварительно сохраняющее элементы последовательности в массив или другие структуры данных. Такое решение эффективно по времени, но неэффективно по памяти. Оно оценивается, исходя из максимального балла – 3 (см. критерии). Кроме того, возможен неэффективный способ определения, какой именно остаток от деления нас интересует, например с помощью цикла, выполняющегося до m раз, или с помощью m условных операторов:

```
  if p = 0 and a > r[0] then r[0] = a;
  if p = 1 and a > r[1] then r[1] = a;
```

и т.д.

Такое решение работает в m раз дольше и оценивается, исходя из максимального балла – 3 (см. критерии).

3. Решение, неэффективное ни по времени, ни по памяти, запоминает входную последовательность в массиве, после чего явно перебирает все возможные пары. Такое решение оценивается, исходя из максимального балла – 2 (см. критерии)

Пример 2. Программа на языке Python 3. Программа эффективна по времени и памяти

```
m = 120
# создание массива для максимальных значений
# для каждого из остатков
r = [0] * m
# обнуление переменных для записи ответа
left = 0
right = 0
# ввод количества элементов
n = int(input())
# ввод значений, поиск искомой пары
for i in range(n):
    a = int(input())
    p = a % m;
    if r[(m - p) % m] > a and r[(m - p) % m] + a > left + right:
        #обновление ответа
        left = r[(m - p) % m]
        right = a;
    # обновление элемента r для соответствующего остатка
    if a > r[p]:
        r[p] = a
print(left, right)
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Пример 3. Программа на языке С++. Программа эффективна по времени и памяти

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
  int n, a, p, left, right;
  int r[120];
  int m = 120;
  cin >> n;
  //обнуление массива r
  for (int i = 0; i < m; ++i)
    r[i] = 0;
  //обнуление переменных для записи ответа
  left = 0; right = 0;
  // ввод значений, поиск искомой пары
  for (int i = 0; i < n; ++i)
  {
    cin >> a; //считываем очередное значение
    p = a % m;
    if (p == 0) p = m;
    if (r[m - p] > a && r[m - p] + a > left + right)
    {
        left = r[m - p]; right = a; //обновление ответа
    }
    // обновление элемента r для соответствующего остатка
    if (p < m)
    {
    if (a > r[p]) r[p] = a;
    }
    else if (a > r[0]) r[0] = a;
  }
  cout << left << ' ' << right;
}
```

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Указания по оцениванию	Баллы
Если в работе представлены две программы решения задачи, то каждая из них независимо оценивается по указанным ниже критериям, итоговой считается бóльшая из двух оценок. Описание алгоритма решения без программы оценивается в 0 баллов	
Программа правильно работает для любых входных данных произвольного размера при условии исправления в ней не более трёх синтаксических ошибок из приведённого ниже списка допустимых ошибок. Используемая память не зависит от количества прочитанных чисел, а время работы пропорционально этому количеству. Допускается наличие в тексте программы до трёх синтаксических ошибок одного из следующих видов: 1) пропущен или неверно указан знак пунктуации; 2) неверно написано, пропущено или написано лишнее зарезервированное слово языка программирования; 3) не описана или неверно описана переменная; 4) применяется операция, не допустимая для соответствующего типа данных. Если одна и та же ошибка встречается несколько раз, это считается за одну ошибку	4
Не выполнены условия, позволяющие поставить 4 балла. Программа работает правильно для любых входных данных произвольного размера при условии исправления в ней не более пяти синтаксических ошибок из приведённого в критериях на 4 балла списка и не более одной ошибки из приведённого ниже списка содержательных ошибок. Время работы пропорционально количеству введённых чисел, но может существенно зависеть от *m* (см. комментарий к эффективному решению задачи). Допускается наличие не более **одной** содержательной ошибки следующих видов: 1) допущена ошибка при вводе данных (например, не считывается значение *N*, или числа могут быть считаны, только если будут записаны в одной строке через пробел); 2) неверная инициализация или её отсутствие там, где она необходима; 3) используется неверный тип данных, при этом ошибка не является синтаксической; 4) не более одного раза используется одна переменная (или константа) вместо другой, или не более одного раза используется один знак операции вместо другого, или не более одного раза используется одно зарезервированное слово языка программирования вместо другого, при этом ошибка не	3

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

является синтаксической; 5) служебное слово else относится не к тому if, к какому следует; 6) отсутствует вывод ответа, или выводится значение не тех переменных; 7) выход за границу массива (в частности, при обращении к *m*-му элементу массива с индексами от 0 до *m*–1, даже если он существует, но не заполнен нужным значением); 8) не выполнен или неверно выполнен учёт элементов, остаток от деления которых на *m* равен 0. 3 балла также ставится за программу, в которой нет содержательных ошибок, но используемая память зависит от количества прочитанных чисел (например, входные данные запоминаются в массиве, контейнере STL в C++ или другой аналогичной структуре данных)	

Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 или 4 балла.
Программа работает верно, эффективно по времени при условии исправления не более трёх содержательных ошибок, описанных в критериях на 3 балла и аналогичных им, и не более девяти синтаксических ошибок, указанных в критериях на 4 балла. При этом в программе могут быть опущены с помощью многоточия однотипные действия, связанные с рассмотрением каждого из остатков от деления на *m*.
 	
Не допускается выставление 2 баллов за программу, если в ней учитываются суммы вида a[i]+a[i] (в том числе в алгоритме без хранения элементов последовательности).
2 балла также ставится за корректное переборное решение, в котором все числа сохраняются в массиве (или другой аналогичной структуре) и рассматриваются все возможные пары. Пример фрагмента соответствующей программы на языке Паскаль:
`left := 0; right := 0;`
`for i := 1 to N - 1 do`
`  for j := i + 1 to N do`
`    if (a[i] > a[j]) and ((a[i] + a[j]) mod m = 0) then`
`      if a[i] + a[j] > left + right then`
`      begin`
`        left := a[i];`
`        right := a[j]`
`      end;`
В цикле реализации переборного алгоритма не допускаются выход индексов за границы массива, а также любые логические ошибки
	2

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

Не выполнены условия, позволяющие поставить 2, 3 или 4 балла. При этом программа описывает в целом правильный алгоритм (эффективный или нет) и в ней присутствует не менее двух элементов решения из перечисленных ниже, возможно, реализованных с ошибками: • учитывается условие `a[i] > a[j]`; • проверяется делимость суммы на *m*; • ищется пара с максимальной суммой. В случае, если в любом решении содержится не более одного из указанных элементов, программа оценивается в 0 баллов	1
Не выполнены критерии, позволяющие поставить 1, 2, 3 или 4 балла	0
Максимальный балл	*4*

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенным считается расхождение в 2 или более балла, выставленных экспертами за выполнение любого из заданий 24–27. Третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые вызвали столь существенное расхождение.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки